p-進ポリログとp-進 L-関数 (「整数論のこの主題,自分はこう考える」若手発表会)

坂内, 健一

数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 97-130

p-進ポリログと p-進 L-関数

名大・多元数理　坂内 健一 (Kenichi BANNAI)
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

1 はじめに

この文章は新しい結果を一切含まない．主目的は Koblitz [Ko] と Coleman [Co] の結果を最小限の予備知識を仮定して解説することである．すなわち，Dirichlet L-関数の特殊値をp-進的に補完した p-進 Dirichlet 関数と，p-進ポリログ関数と呼ばれる p-進解析関数との関係を詳しく証明することが目的である．

p-進 Dirichlet 関数は，Dirichlet L-関数の負の整数点での値を p-進的に張り合わすことによって，最初に Kubota-Leopoldt [KL] によって連続関数として定義された．この関数は岩澤 [Iw] によって p-進解析的であることが示された．p-進ポリログ関数は

$$\mathrm{Li}_j^{(p)}(t) = \sum_{n\geq 1,(n,p)=1} \frac{t^n}{n^j}$$

の形で定義される素朴な関数である．上の冪級数は $\{x \in \mathbb{C}_p; |x| < 1\}$ で p-進的に収束するが，実際はより大域的な p-進解析関数に解析接続される．この大域的な関数はある motive の p-進的な周期として表れることが知られている [GK], [Gr], [So], [Su], [Ban1]．この理由から，この関数を明確に特徴付けることが可能である．

専門家には良く知られていることであるが，p-進 Dirichlet L-関数と p-進ポリログ関数の関係は非常に簡単である．Mazur [Ma] は p-進 L-関数をある p-進測度の積分変換として定義した．Katz [Kz] は p-進測度と形式冪級数との対応を与え，実際 Mazur の定義した p-進測度が，ある形式冪級数と対応することを示した．これらの構成を調べると，大雑把に言うと，導手 N の Dirichlet 指標の p-進 L-関数を定義する p-進測度は，上の対応関係を通して，1 の N 乗根達を中心として p-進ポリログ関数を級数展開した形式冪級数の和に対応する．すなわち，p-進ポリログ関数と呼

ばれる大域的な関数は，様々な点の周りで，様々な p-進 L-関数の情報を含んでいるわけである．

自分が最も興味を惹かれる点は，局所的に存在する大事な冪級数が，実は，明確な特徴付けを持つ大域的な関数を局所的に見たものであるという点である．

Beilinson 予想，Bloch-加藤予想や岩澤主予想を解くためには，K-群の元や Euler system 等，性質の良い「元」を探し出すことが大切である．今の文脈で言うと，p-進 L-関数に対応する冪級数を探し出すことが大切である．しかし，この「元」を探す過程で，局所的なところを見ているだけでは，性質の良いものを特徴付けることが難しい．良い形式冪級数等を探すと言っても，あまりにも手がかりが少ないからである．

良いものは局所的に存在するだけでなく，大域的に存在するべきである．また，大域的に存在するものは非常に明確な特徴付けを持つはずである．Motivic なポリログの思想は，こういう，scientia の普遍的な思想に沿っているのだと思う．問題を大域化することは，根本的には，良い特殊関数をより広い範囲に解析接続させるという試みの延長線上にあると思う.（この文章を書きながら，ふと，上の主張は類似としてではなく，本当に自然な延長線上にあるのではないかと思った)．良い「元」を探す問題を大域化するのであれば，今後は様々な予想自体をも，何らかの形で大域化することが有効ではないかと思う．

先程，p-進 Dirichlet L-関数と p-進ポリログ関数の関係は簡単であると述べた．実際は p-進測度や p-進解析関数，p-進解析接続等，あまり一般的でない用語が多数現れ，実際以上に難しいという印象を与える．また，これらに関する結果は複数の文献にまたがり，書き方があまり統一されていない．このため，この文章では，整数論を志す学部生程度の知識のみを仮定して，p-進 Dirichlet L-関数の構成などもじっくりと解説して，最終的に Koblitz と Coleman の結果を証明する．繰り返すが，この文章は新しい結果を一切含まない．

目次

1.1 謝辞，お詫び

この研究集会に推薦して下さった栗原将人先生，講演の機会を下さった伊原康隆先生に感謝いたします．原稿を執筆中には後輩の小林真一君，安田正大君の両名に大変にお世話になりました．また，何度か親切に相談に乗っていただいた玉川安騎男さんにも感謝いたします．

初学者に配慮した内容の文章を書こうと試みたのですが，紙数の制限もあり，大分片寄った内容になってしまいました．証明等も言葉足らずの所が多いと思います．また，急いで書いた部分も多いので，原稿に乱雑な箇所も存在すると思われます．当分の間，この原稿の最新版をWeb “http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~bannai”

で公開する予定ですので，御意見・御指摘・不明な点等がありましたら，連絡して下されば幸いです．E-mail は bannai@math.nagoya-u.ac.jp です．

影から応援して下さった友人にも感謝します．

1.2 記号

p を素数とする．この原稿の内容では本質的ではないが，簡単のため $p \neq 2$ と仮定する．K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，$\mathcal{O}_K$ をその整数環とする．$\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の完備化とする．以下では埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$，$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する．

2 複素 L-関数

Dirichlet L-関数は部分ゼータ関数の和として表され，さらに部分ゼータ関数はゼータ関数 $\zeta(t,s)$ の和として表される．ゼータ関数 $\zeta(t,s)$ の特殊値はある有理関数の特殊値として表される．Dirichlet L-関数の特殊値を代数的に捕らえる試みはすべてこの有理関数を介して行われる．

2.1 Dirichlet L-関数と部分ゼータ関数

この節では Dirichlet L-関数の定義を述べる．

$N \geq 1$ を整数とする．準同型写像

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$$

を Dirichlet 指標と呼ぶ．N を割る整数 n に対し $\chi(n) = 0$ と定義することによって，χ を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ の写像とみなす．χ が任意の整数 $M < N$, $M|N$ に対して $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ を経由しないとき，N を χ の導手と呼ぶ．

定義 2.1. Dirichlet L-関数を

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1 \tag{2.1}$$

と定義する．

Dirichlet L-関数は全複素平面で有理型な関数に解析接続される．この関数は $\chi=1$ のとき $s=1$ で 1 位の極を持つ以外は正則であることが知られている．

この文章では Dirichlet L-関数の p-進版を構成して，p-進ポリログ関数との関係を述べる．Dirichlet L-関数は次に述べる部分ゼータ関数を用いて書ける．

定義 2.2. a, $N(N\geq 1)$ を整数とする．部分ゼータ関数を

$$\zeta_{a(N)}(s)=\sum_{n\equiv a(N)} n^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s)>1$$

と定義する．

部分ゼータ関数は $s=1$ を除いて全平面で正則な関数 $\zeta_{a(N)}(s)$ に解析接続される．次節で見るように，部分ゼータ関数の負の整数点での値はある有理関数の特殊値として記述される．

Dirichlet L-関数は部分ゼータ関数を用いると

$$L(\chi,s)=\sum_{a\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \chi(a)\zeta_{a(N)}(s)$$

と表される．

2.2 ゼータ関数 $\zeta(t,s)$

この節では加藤 [Ka] §1.3 に従って，ゼータ関数 $\zeta(t,s)$ の定義を述べる．この節の解説は基本的に [Hi] §2.2, §2.3 の証明の 2 変数版である．

定義 2.3. $(t,s)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ として，$|t|<1$，または $|t|\leq 1$ かつ $\mathrm{Re}(s)>1$ と仮定する．このとき，

$$\zeta(t,s)=\sum_{n\geq 1} t^n n^{-s}$$

と置く．

$\zeta(t,s)$ は以下の性質をみたす．

定理 2.4. $F=\{t\in\mathbb{R}|t\geq 1\}$ と置く．

1. $\zeta(t,s)$ は $(\mathbb{C}\setminus F)\times\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続される.

2. 任意の整数 $c\geq 2$ に対して,

$$\zeta_c(t,s)=\zeta(t,s)-c^{1-s}\zeta(t^c,s)$$

は $(\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{C}|t\notin F,t^c\in F\})\times\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続される.

注意 2.5. 上の命題で $c\geq 2$ の場合が必要なのは, $t=1$ での値を考えたいからである.

この章では以後, 定理 2.4 の証明を与える. 複素平面を実軸の正の部分に沿って裁断して, それを境界とする領域を考える. この領域の中で $0\leq\mathrm{Re}\log z\leq 2\pi$ をみたす対数関数の枝を固定する. 任意の複素数 y に対して $z^s=e^{s\log z}$ と定義する.

$t\in\mathbb{C}\setminus F$ に対し,

$$G(t,y)=\frac{te^{-y}}{1-te^{-y}}=\sum_{n=1}^{\infty}t^n e^{-ny}$$

と置く. $|e^{-y}t|<1$ のとき, 例えば, $\mathrm{Re}\,y>0$, $|t|\leq 1$ のとき, 2項目の冪級数は収束する. $|t|\leq 1$, $t\neq 1$ がみたされる場合, $G(t,y)$ は正の実軸上に特異点を持たない.

命題 2.6. $|t|\leq 1$, $t\neq 1$, $\sigma=\mathrm{Re}\,s>1$ をみたすとき,

$$\int_0^{\infty}G(t,y)y^{s-1}dy=\zeta(t,s)\Gamma(s)$$

が成り立つ.

Proof. $y\to 0$, $y\to\infty$ のとき $G(t,y)ye^{y/2}\to 0$. ゆえにある定数 $M>0$ が存在して $|G(t,y)y|<Me^{-y/2}$.

$$\int_0^{\infty}|G(t,y)y^{s-1}|dy<M\int_0^{\infty}e^{-y/2}y^{\sigma-2}dy=2^{\sigma-1}M\Gamma(\sigma-1)<\infty.$$

ゆえに関数 $|G(t,y)y^{s-1}|$ は区間 $[0,\infty]$ で可積である.

$$\sum_{n=1}^{\infty}t^n e^{-ny}y^{s-1}=G(t,y)y^{s-1}$$

に注意すると，Lebesgue の項別積分定理から

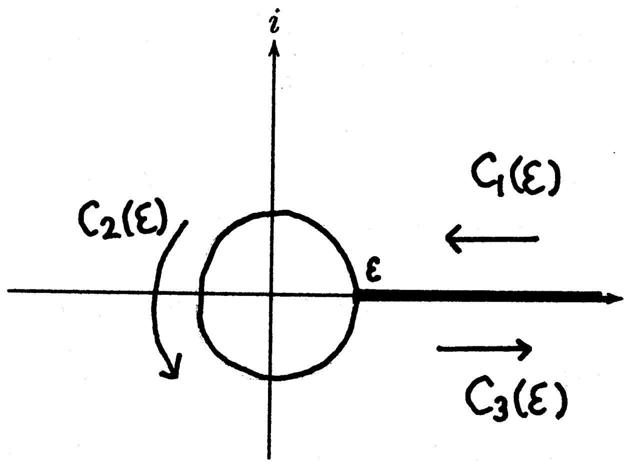
$$\int_0^\infty G(t,y)y^{s-1}dy = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty t^n e^{-ny}y^{s-1}dy = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^n e^{-ny}y^{s-1}dy$$

を得る．上の式の右の積分を $ny \mapsto y$ と変数変換すると，

$$\int_0^\infty G(t,y)y^{s-1}dy = \sum_{n=1}^\infty t^n n^{-s} \int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy = \zeta(t,s)\Gamma(s)$$

を得る． □

実数 $\epsilon > 0$ に対して複素平面上の積分路を以上の様に定める．$C_1(\epsilon)$ は ∞ から ϵ まで $z = r\,(\infty > r \geq \epsilon)$ をみたす実軸上の路，$C_3(\epsilon)$ は ϵ から ∞ までの $z = re^{2\pi i}\,(\epsilon \leq r < \infty)$ をみたす実軸上の路，$C_2(\epsilon)$ を $C_1(\epsilon)$ の終点から $C_3(\epsilon)$ の始点を結ぶ原点を中心とした，半径 ϵ の円上の反時計回りの路とする．道 $C(\epsilon) = C_1(\epsilon) + C_2(\epsilon) + C_3(\epsilon)$ とする．



十分小さい $\epsilon > 0$ に対して，積分

$$H(t,s) = \int_{C(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy$$

は $(t,s) \in (\mathbb{C} \setminus F) \times \mathbb{C}$ 上の 2 変数正則関数を定義する．

定理 2.7. $|t| \leq 1, t \neq 1, \mathrm{Re}\, s > 1$ のとき，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$\zeta(t,s) = (e^{2\pi i s} - 1)^{-1}\Gamma(s)^{-1}\int_{C(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy \tag{2.2}$$

が成り立つ.

Proof. $|t| \leq 1, t \neq 1, \mathrm{Re}\, s > 1$ となる s, t を固定して，σ, τ を s の実部と虚部とする．$\epsilon > 0$ は，$|y| < \epsilon$ で $G(t,y)$ が正則となる様に十分小さく取る．この範囲で ϵ を変化させると，$G(t,y)$ は差の積分経路の中で正則なので，(2.2) は ϵ の取り方によらないことが導かれる.

積分路の定義から，

$$\int_{C_1(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy = -\int_{\epsilon}^{\infty} G(t,y)y^{s-1}dy$$
$$\int_{C_3(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy = e^{2\pi i s}\int_{\epsilon}^{\infty} G(t,y)y^{s-1}dy.$$

また，$G(t,y)$ は $y = 0$ の近傍で正則であることから，特に上限 M を持つ．ゆえに $y = \epsilon e^{i\theta}$ とおくと，

$$\left|\int_{C_2(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy\right| \leq \epsilon^{\sigma}\int_0^{2\pi} e^{-\tau\theta}Md\theta \leq 2\pi M\epsilon^{\sigma}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C(\epsilon)} G(t,y)y^{s-1}dy &= (e^{2\pi i s} - 1)\int_0^{\infty} G(t,y)y^{s-1}dy \\ &= (e^{2\pi i s} - 1)\zeta(t,s)\Gamma(s).\end{aligned}$$

以上のことから命題を得る. □

上の定理から，$\zeta(t,s)$ は $(t,s) \in (\mathbb{C}\setminus F)\times\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されることが示された．この関数の極は $(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)$ の 0 点 $(\mathbb{C}\setminus F)\times\{r \in \mathbb{Z}; \geq 1\}$ に含まれる．しかし，収束することから，$\{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}\times\mathbb{C}$ の範囲で $\zeta(t,s)$ は極を持たないので，結局 $\zeta(t,s)$ は $(\mathbb{C}\setminus F)\times\mathbb{C}$ 上正則である.

補題 2.8. 任意の整数 $c \geq 2$ に対して，$H(t,s) - c^{1-s}H(t^c,s)$ は $F\times\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の近傍上正則な関数に延びる.

Proof. 積分 (2.2) の t を t^c で，y を cy で置き換えると，

$$c^{1-s}H(t^c,s) = \int_{C(\epsilon)} c\left(1-t^c e^{-cy}\right)^{-1} t^c e^{-cy} y^{s-1} dy.$$

$t \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{C}; t \notin F, t^c \in F\}$ に関して，

$$(1-te^{-y})^{-1} - c(1-t^c e^{-cy})^{-1}$$

は y に関して $\{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$ の近傍で正則である. □

以上のことから定理 2.4 が導かれる.

注意 2.9. $\zeta(t,s)$ と部分ゼータ関数の定義から，

$$\zeta(\alpha,s) = \sum_{a=0}^{N-1} \alpha^a \zeta_{a(N)}(s)$$

が成り立つ. $\zeta_{a(N)}(s)$ が $\zeta(\alpha,s)$ の また，逆に，整数 a に対して

$$\sum_{\alpha \in \mu_N} \alpha^a = \begin{cases} N & a = 0 \pmod N \\ 0 & a \neq 0 \pmod N \end{cases}$$

に注意すると，等式

$$\zeta_{a(N)}(s) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in \mu_N} \alpha^{-a} \zeta(\alpha,s) \tag{2.3}$$

が成り立つ.

2.3 有理関数

定義 2.10. 任意の整数 $r \geq 1$ に対し，有理関数 $g_r(t)$, $g_{r,c}(t)$ を以下の様に定義する.

$$g_r(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right)^r \mathrm{Li}_1(t), \qquad g_{r,c}(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right)^r \mathrm{Li}_{1,c}(t).$$

ここで $\mathrm{Li}_1(t) = -\log(1-t)$ は

$$\mathrm{Li}_1(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$$

で定義される冪級数とする．また，$c \geq 2$ は整数で $\mathrm{Li}_{1,c}(t) = \mathrm{Li}_1(t) - \mathrm{Li}_1(t^c)$.

ポリログとの関係を明確にするため上の様に定義したが，実際 $r=1$ のとき

$$g_1(t) = \frac{t}{1-t}, \qquad g_{1,c}(t) = \frac{t}{1-t} - \frac{ct^c}{1-t^c}$$

を満たすので，$g_r(t)$ や $g_{r,c}(t)$ は単に有理関数である．この関数はゼータ関数 $\zeta(t,s)$ と密接な関係にあることが知られている．

補題 2.11. $F = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 1\}$ と置く．任意の整数 $r \geq 1$ に対し，以下の等式が成立する．

1. 任意の $t \in \mathbb{C} \setminus F$ に対し，

$$g_r(t) = \zeta(t, 1-r).$$

2. $c \geq 2$ を整数とする．任意の $t \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{C}; t \notin F, t^c \in F\}$ に対し，

$$g_{r,c}(t) = \zeta_c(t, 1-r).$$

Proof. $|t| < 1$ のとき，$g_r(t)$ および $g_{r,c}(t)$ は冪級数

$$g_r(t) = \sum_{n\geq 1} n^{1-r} t^n, \qquad g_{r,c}(t) = \sum_{n\geq 1} n^{1-r}(t^n - c^r t^{nc})$$

で与えられる．よって $\zeta(t,1-r)$, $\zeta_c(t,1-r)$ の定義からこの範囲での等式は従う．一般の t に関する等式は一致の原理から従う． □

3 p-進測度

p-進 L-関数は Dirichlet 指標全体から $\mathbb{C}_p$ への射である．この関数は Dirichlet 指標をある p-進測度に関して積分すること，すなわち，ある p-進測度の積分変換として構成される．準備として，この章では p-進測度の一般論を解説する．

この章と次の章は [Hi] に沿って解説する．

3.1 p-進測度の定義

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし，$\mathcal{O}_K$ をその整数環とする．K は $|p| = p^{-1}$ をみたす絶対値によって完備な距離空間になっている．X をコンパクトな位相空間とする．$\mathrm{Cont}(X, K)$ を X から K への連続関数全体からなる K ベクトル空間とする．この空間はノルム

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

によって p-進 Banach 空間になる．すなわち，$\mathrm{Cont}(X, K)$ は上のノルムに関して完備な距離空間である．

定義 3.1. $\mathrm{Cont}(X, K)$ から Kへの連続な K 線型写像を，K に値を持つ X 上の（p-進）測度と呼ぶ．K に値を持つ X 上の測度全体を $\mathrm{Meas}(X, K)$ と記す．

μ を K に値を持つ X 上の測度，$f : X \to K$ を X 上の連続関数としたとき，$\mu(f)$ をしばしば

$$\int_X f(x) d\mu(x)$$

と記述する．

補題 3.2. K-線型写像 $\mu : \mathrm{Cont}(X, K) \to K$ が測度となる必要十分条件は，ある定数 $M \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $f \in \mathrm{Cont}(X, K)$ に対して

$$|\mu(f)| \leq M \|f\| \tag{3.1}$$

が成り立つことである．

Proof. μ に対して (3.1) をみたす f が存在すると仮定する．このとき，

$$|\mu(f) - \mu(g)| \leq M\|f - g\| \to 0 \quad (f \to g)$$

となるので，μ は連続．逆に，任意の整数 $n > 1$ に対して

$$|\mu(f_n)| > p^n \|f_n\|$$

をみたす連続関数 $f_n : X \to K$ が存在すると仮定する．$f_n = 0$ と仮定すると上の式の両辺は 0 となり成立しないので，$f_n \neq 0$ である．X がコンパクトであることから $\|f_n\| = |f_n(x_n)|$ をみたす $x_n \in X$ が存在する．$u_n = p^n f_n / f_n(x_n)$ と置くと，

$$\|u_n\| = \|p^n f_n\| / |f_n(x_n)| = p^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

しかし，

$$|\mu(u_n)| = \left| \mu \left(\frac{p^n f_n}{f_n(x_n)} \right) \right| > 1$$

であるので，$\varinjlim_n \mu(u_n) \neq 0$．従って μ は連続でないことが導かれる． □

定義 3.3. $\mathrm{Meas}(X, K)$ にノルムを

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\mu(f)|}{|f|}, \quad \mu \in \mathrm{Meas}(X, K)$$

によって定義する．補題 3.2 から $\|\mu\| < \infty$ を得る．$\mathrm{Meas}(X, K)$ はこのノルムによって p-進 Banach 空間になる．

定義 3.4. X を全不連結な位相空間として，$U \subset X$ を開集合とする．このとき，U の特性関数

$$\phi_U(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

は，X 上の連続関数である．U の面積 $\mu(U)$ を $\mu(U) = \mu(\phi_U)$ によって定義する．

3.2 $\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数

この節では Mahler の定理を証明する．すなわち，$\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ は p-進 Banach 空間として関数 $\{\binom{x}{n}; n \geq 1\}$ によって生成されることを示す．

定義 3.5. 整数 $n \geq 1$ に対し，多項式 $\binom{X}{n}$ を

$$\binom{X}{n} = \begin{cases} \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

と定義する．

(3.2) の関数は多項式なので，$\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ の元を定義する．また，整数 m に対し値を自然数に取るので，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_p$ が稠密であることから $\binom{x}{n}$ は $\mathbb{Z}_p$ から $\mathbb{Z}_p$ への連続関数を定義する．また $x = n$ では 1 となるので，$\|\binom{x}{n}\| = 1$ を得る．

定理 3.6 (Mahler の定理). 関数 $f : \mathbb{Z}_p \to K$ が連続であるための必要十分条件は，$\varinjlim_n a_n(f) \to 0$ をみたす数列 $a_n(f) \in K$ が一意に存在して，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \binom{x}{n} \quad (x \in \mathbb{Z}_p) \tag{3.3}$$

をみたすことである．

Proof. $f(x)$ が (3.3) の形で書けたと仮定する．

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n(f) \binom{x}{n}$$

と置くと，$\varinjlim_n a_n(f) \to 0$ と $\|\binom{x}{n}\| = 1$ から

$$\|f - f_m\| \to 0 \quad (m \to \infty).$$

$\mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ のノルムに関する完備性から $f \in \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ が従う．

逆に $f : \mathbb{Z}_p \to K$ を連続関数とする．

$$a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \tag{3.4}$$

と置くと，整数 $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \binom{m}{n} &= \sum_{n=0}^{m} a_n(f) \binom{m}{n} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} f(k) \sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m}{j+k} \binom{j+k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} f(k) \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m-k}{j} = f(m).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ただし，最後から２番目の等式は

$$\binom{m}{j+k}\binom{j+k}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{j},$$

最後の等式は

$$\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^j\binom{m-k}{j} = \begin{cases}(1+(-1))^{m-k}=0 & k<m\\ 1 & k=m\end{cases}$$

から従う．後に証明される命題 3.9 から $\varinjlim_n a_n(f)=0$ が成り立つので，

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\binom{x}{n}$$

は $\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数で，$\mathbb{N}$ 上では $f(x)$ と一致する．$f(x)$ の連続性と $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}_p$ が稠密であることから $f(x)=\tilde{f}(x)$ を得る．

$a_n(f)$ の取り方が一意であることは，f の連続性と補題 3.7 から従う． □

補題 3.7. a_n, $\tilde{a}_n \in K$ を数列とする．任意の $x\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n\binom{x}{n}$$

が成り立つとき，$a_n=\tilde{a}_n$ となる．

Proof. $x\in\mathbb{N}$ に対して両辺は有限和である．両辺の差を取ることによって

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{x}{n}=0 \quad (x\in\mathbb{N}) \tag{3.6}$$

なら $b_n=0 \quad (n\geq 0)$ となることを証明すれば十分である．0 とは異なる b_n が存在すると仮定する．このとき，m を $b_m\neq 0$ となる最小の整数 ≥ 0 とする．$x=m$ を (3.6) に代入すると，

$$b_m=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{x}{n}=0$$

となり，m の取り方に矛盾する．すなわち，$b_n=0 \quad (n\geq 0)$ が成り立つ． □

Mahler の定理の証明を完成するためには，命題 3.9 を証明すれば十分である．その前に次の補題を証明する．

補題 3.8. 関数 $f:\mathbb{N}\to K$ を考え，$a_n(f)$ を (3.4) で定義する．このとき，$y\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_{j+y}(f) = -\sum_{k=1}^{y-1} a_{j+k}(f)\binom{y}{k} + \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\left(f(k+y)-f(k)\right) \qquad (3.7)$$

が成立する．

Proof. $y\in\mathbb{N}$ を固定して，$\mathbb{N}$ 上の関数 $f(x+y)$ を考える．(3.5) と同様な計算から

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{x+y} a_n(f)\binom{x+y}{n} = \sum_{n=0}^{x+y} a_n(f)\sum_{j=0}^{n}\binom{x}{j}\binom{y}{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}\sum_{k=0}^{y} a_{j+k}(f)\binom{y}{k} \quad (x\in\mathbb{N}). \end{aligned}$$

ただし 2 番目の等式は

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{x}{j}\binom{y}{n-j}$$

から従う．また，(3.5) と同様の計算から，

$$a_n(f_y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k+y)$$

と置くと，任意の $x\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(x+y) = \sum_{j=0}^{x} a_j(f_y)\binom{x}{j} = \sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}f(k+y).$$

補題 3.7 から $\binom{x}{j}$ の係数を比較することによって

$$\sum_{k=0}^{y} a_{j+k}(f)\binom{y}{k} = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}f(k+y)$$

を得る．主張は左辺の $k=y$ の項に関して解くことによって得られる． □

命題 3.9. $f:\mathbb{Z}_p\to K$ を連続関数として，$a_n(f)$ を (3.4) の様に定義する．このとき，

$$\varinjlim_n a_n(f)=0$$

をみたす．

Proof. f はコンパクト集合上の連続関数なので，K への像もコンパクトであり，特に有界である．十分絶対値の小さな定数 $c\in K$ を取れば，cf の像は $\mathcal{O}_K$ に含まれる．命題の主張は定数倍で変わらないので，以後 f の像は $\mathcal{O}_K$ に含まれると仮定する．このとき，$a_n(f)$ の定義から，$a_n(f)\in\mathcal{O}_K$ を得る．

以下では，任意の $m\geq 0$ に対し

$$|a_n(f)|\leq p^{-m}\,(n\geq N_m)$$

をみたす整数 N_m を帰納的に定義する．任意の $n\geq 0$ に対して $|a_n(f)|\leq 1$ であるので，$N_0=0$ と取れば良い．ある整数 m まで N_m が定義されたとする．f がコンパクト集合上の連続関数ということから，特に一様連続であることが導かれる．このことから，任意の $x\in\mathbb{Z}_p$ に対して

$$|f(x+p^u)-f(x)|<p^{-(m+1)}$$

をみたす整数 $u\in\mathbb{N}$ が存在する．(3.7) を $y=p^u$ として適用すると，

$$a_{j+p^u}(f)=-\sum_{k=1}^{p^u-1}a_{j+k}(f)\binom{p^u}{k}+\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}(f(k+p^u)-f(k)).$$

$1\leq k\leq p^u-1$ のとき $|\binom{p^u}{k}|\leq p^{-1}$ であり，任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対して $|f(k+p^u)-f(k)|<p^{-(m+1)}$ が成り立つので，$j\geq N_m$ と取ると，帰納法の仮定から $|a_{j+k}(f)|\leq p^{-m}$ をみたすので，上の式の絶対値を取ることによって

$$|a_{j+p^u}(f)|\leq p^{-(m+1)}\quad(j\geq N_m)$$

が導かれる．以上のことから $N_{m+1}=N_m+p^u$ と取れば良いことが分かる． □

3.3 $\mathbb{Z}_p$ 上の測度と冪級数表示

この節では，$\mathbb{Z}_p$ 上の測度と形式冪級数の関係を記す．前節の Mahler の定理（定理 3.6）によって，任意の $f \in \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \binom{x}{n} \quad a_n(f) \to 0\,(n \to \infty)$$

と展開されることが示された．$\mu \in \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$ を取ると，μ の連続性から

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu(x) = \varinjlim_m \sum_{n=0}^{m} a_n(f) \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu(x)$$

を得る．

$$b_n(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu(x) \tag{3.8}$$

と置くと，ノルムの定義（定義 3.3) から

$$|b_n(\mu)| \leq \|\mu\| \left| \binom{x}{n} \right| = \|\mu\| < \infty.$$

すなわち，$b_n(\mu)$ が有界であることが導かれる．逆に有界な数列 $b_n \in K$ が与えられたとき，$f \in \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K)$ に対して無限級数

$$\mu(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) b_n$$

は収束する．これから写像 $\mu : \mathrm{Cont}(\mathbb{Z}_p, K) \to K$ が定義される．$|\mu(f)| \leq (\sup_n b_n)|f|$ をみたすので，補題 3.2 から $\mu \in \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$ を得る．

定義 3.10. $\mu \in \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$ としたとき，附随する冪級数 $\Phi_\mu(T)$ を

$$\Phi_\mu(T) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\mu) T^n \in K \otimes \mathcal{O}_K[[T]] \tag{3.9}$$

と定義する．

上の式の右辺の環 $K \otimes \mathcal{O}_K[[T]]$ は，係数が有界な形式冪級数全体と一致している．$x \in \mathbb{Z}_p$ に対し，形式的に

$$(1+T)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} T^n$$

であることから，以後 (3.9) を以下の (3.10) の様に記す．以上の議論から以下の定理を得る．

定理 3.11 (Katz). $\mu \in \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$ を与えることと，冪級数

$$\Phi_\mu(T) = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x d\mu(x) \in K \otimes \mathcal{O}_K[[T]] \tag{3.10}$$

を与えることは同値である．

定理 3.11 の式 (3.10) から

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^r \mu(x) = \left((1+T)\frac{d}{dT}\right)^r \Phi_\mu(T)\Big|_{T=0} \tag{3.11}$$

を得る．

注意 3.12. 上の対応を用いて，測度 μ による $a + p^n\mathbb{Z}_p$ の面積を計算すると，

$$\begin{aligned}\mu(a+p^n\mathbb{Z}_p) &= \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} d\mu(x) = \frac{1}{p^n}\sum_{\alpha\in\mu_{p^n}} \alpha^{-a}\int_{\mathbb{Z}_p}\alpha^x d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p^n}\sum_{\alpha\in\mu_{p^n}} \alpha^{-a}\Phi_\mu(\alpha-1)\end{aligned}$$

となる．

次に $\mathbb{Z}_p$ 上の測度を $\mathbb{Z}_p^*$ へ制限することを考える．α を 1 の p-乗根とする．

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \alpha^x (1+T)^x \mu(x) = \Phi_\mu(\alpha(1+T)-1)$$

が成り立つので，

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu(x) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha\in\mu_p} \Phi_\mu(\alpha(1+T)-1).$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} (1+T)^x d\mu(x) = \Phi_\mu(T) - \frac{1}{p} \sum_{\alpha \in \mu_p} \Phi_\mu(\alpha(1+T)-1).$$

以上の考察から次の命題を得る.

命題 3.13. $\mathbb{Z}_p$ 上の測度 μ に附随する冪級数 $\Phi_\mu(T)$ が関係式

$$\varphi(\Phi_\mu(T)) := \Phi_\mu((1+T)^p - 1) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha \in \mu_p} \Phi_\mu(\alpha(1+T)-1)$$

をみたしていれば,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} (1+T)^x d\mu(x) = (1-\varphi)\,\Phi_\mu(T)$$

が成り立つ.

4 p-進 L-関数

この章では Dirichlet L-関数 $L(\chi, s)$ の負の整数点での値を補完する p-進 L-関数を構成する. $N \geq 1$ を整数として,

$$X_N = \varprojlim{}_n (\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/N) \times \mathbb{Z}_p$$

とおく. p-進 L-関数は X_N 上の p-進測度の積分変換として定義される. 実際は

$$\mathrm{Meas}(X_N, K) = \prod_{a \in \mathbb{Z}/N} \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$$

と分解するので, X_N 上の測度を定義するためには, 各 $a \in \mathbb{Z}/N$ に対して $\mathbb{Z}_p$ 上の測度を定義すれば十分である.

Dirichlet L-関数は部分ゼータ関数の和として表される. この理由から, p-進 Dirichlet L-関数を定義する準備として, 最初の節では, 各 $a \in \mathbb{Z}/N$ に対して部分ゼータ関数 $\zeta_{a(N)}(s)$ の値を補完する p-進測度を構成する.

次の節ではこれを張り合わせて X_N 上の p-進測度を定義する. 最後の節では p-進 L-関数の定義を述べる.

4.1 部分ゼータ関数を補完する p-進測度の構成

p-進 L-関数を定義する準備として，§2.3 で定義した有理関数

$$
\begin{aligned}
g_{1,c}(t) &= \frac{t}{1-t} - \frac{ct^c}{1-t^c} \\
&= \frac{t + 2t^2 + \cdots + (c-1)t^{c-1}}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{c-1}} \in \mathbb{Z}\left[t, \frac{1-t}{1-t^c}\right]
\end{aligned}
$$

を用いて，$a \in \mathbb{Z}/N$ に対して $\mathbb{Z}_p$ 上の p-進測度 $\mu_{a,c}$ を定義する．

$N, c > 1$ を整数として，$(N,c) = 1$ と仮定する．1 の N 乗根 α に対して，$\mathbb{Z}_p$ 上の測度 $\mu_{\alpha,c}$ を定義する．変数 $T = (\alpha^{-1}t - 1)$ で $g_{1,c}(t)$ を冪級数展開したものを $g_{1,c}(T)$ と置くと

$$
g_{1,c}(T) \in \mathbb{Z}[\alpha][[T]] \subset \mathbb{Z}_p[\alpha][[T]].
$$

定理 3.11 によって $g_{1,c}(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の測度を $\mu_{\alpha,c}$ と記す．

命題 4.1. 測度 $\mu_{\alpha,c} \in \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p(\alpha))$ は

$$
\int_{\mathbb{Z}_p} x^r d\mu_{\alpha,c}(x) = \zeta_c(\alpha, -r) \qquad (r \geq 0)
$$

をみたす．

Proof. 変数 T の定義から微分作用素として

$$
t\frac{d}{dt} = (1+T)\frac{d}{dT}.
$$

ゆえに

$$
g_{r,c}(T) = \left((1+T)\frac{d}{dT}\right)^{r-1} g_{1,c}(T)
$$

は $g_{r,c}(t)$ を T で冪級数展開したものと一致する．この事実と補題 2.11 から

$$
g_{r,c}(T)|_{T=0} = g_{r,c}(t)|_{t=\alpha} = \zeta_c(\alpha, 1-r).
$$

命題は測度と冪級数の関係 (3.11) から従う． □

注意 4.2. より詳しくは，ϵ を1の p^n-乗根とすると，

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \epsilon^x x^r d\mu_{\alpha,c}(x) = \zeta_c(\epsilon\alpha, -r) \qquad (r \geq 0)$$

が成り立つ．

Proof. 上の積分が

$$g_{r,c}(T)|_{T=\epsilon-1} = g_{r,c}(t)|_{t=\epsilon\alpha} = \zeta_c(\epsilon\alpha, 1-r)$$

に一致することから従う． □

定義 4.3. $\mathbb{Z}_p$ 上の測度 $\mu_{a(N),c}$ を

$$\mu_{a(N),c} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in \mu_N} \alpha^{-a} \mu_{\alpha,c} \tag{4.1}$$

と定義する．

$\mu_{a(N),c}$ を (4.1) と定義した理由は，式 (2.3) を用いて $\zeta_c(t,s)$ から部分ゼータ関数の値を引き出したいからである．実際，命題 4.1 と (2.3) から，

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^r d\mu_{a(N),c}(x) = \zeta_{a(N)}(-r) - c^{1+r}\zeta_{ac^{-1}(N)}(-r) \qquad (r \geq 0) \tag{4.2}$$

を得る．(ただし2つ目のゼータの添字 ac^{-1} は c をかけると $\equiv a \pmod N$ となる整数．c は N と互いに素なので，$\mathbb{Z}/N$ で可逆)．

すなわち，測度 $\mu_{a(N),c}$ は部分ゼータ関数の負の整数点での値を補完している．より詳しく言えば，以下の命題が成り立つ．

命題 4.4. $u \in \mathbb{Z}/p^n$ とする．このとき整数 $r \geq 0$ に対して

$$\int_{u+p^n\mathbb{Z}_p} x^r d\mu_{a(N),c} = \zeta_{b(Np^n)}(-r) - c^{1+r}\zeta_{bc^{-1}(Np^n)}(-r). \tag{4.3}$$

ただし，$b \in \mathbb{Z}/Np^n$ は $b \equiv a \pmod N$, $b \equiv u \pmod{p^n}$ をみたすもの．

Proof. 左辺

$$= \sum_{\epsilon \in \mu_{p^n}} \frac{1}{p^n} \epsilon^{-u} \int_{\mathbb{Z}_p} \epsilon^x x^r d\mu_{a(N),c} = \sum_{\epsilon \in \mu_{p^n}} \frac{1}{p^n} \epsilon^{-u} \int_{\mathbb{Z}_p} \epsilon^x x^r d\mu_{a(N),c}$$

$$= \sum_{\epsilon \in \mu_{p^n}} \sum_{\alpha \in \mu_N} \frac{1}{Np^n} \epsilon^{-u} \alpha^{-a} g_{r,c}(\epsilon\alpha) = \frac{1}{Np^n} \sum_{\omega \in \mu_{Np^n}} \omega^{-b} g_{r,c}(\omega).$$

補題 2.11 より $g_{r,c}(\omega) = \zeta_c(\omega, -r)$ が成り立つので，命題の主張を得る． □

4.2 X_N 上の p-進測度

以後 K は 1 の N 乗根を全て含むと仮定する．この節では分解

$$\mathrm{Meas}(X_N, K) = \prod_{a \in \mathbb{Z}/N} \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p, K)$$

を用いて X_N 上の p-進測度 $\mu_{N,c}$ を定義する．後半では，この測度をある開集合 $X_N^* \subset X_N$ に制限したもの考える．

定義 4.5. X_N 上の p-進測度 $\mu_{N,c}$ を，

$$\int_{X_N} f(x) d\mu_{N,c}(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z}/N} \int_{\mathbb{Z}_p} f((a,x)) d\mu_{a(N),c}(x)$$

によって定義する．ただし$(a,x) \in \mathbb{Z}/N \times \mathbb{Z}_p \cong X_N$.

命題 4.6. $\chi : (\mathbb{Z}/Np^n)^* \to \mathbb{C}_p^*$ を *Dirichlet* 指標とする．測度 $\mu_{N,c}$ は

$$\int_{X_N} \chi(x) x^r d\mu_{N,c}(x) = (1 - \chi(c) c^{1+r}) L(\chi, -r) \qquad (r \geq 0)$$

をみたす．

Proof. $\mu_{N,c}$ の定義と (4.3)から

$$\int_{X_N} \chi(x) x^r d\mu_{N,c}(x) = \sum_{b \in \mathbb{Z}/Np^n} \chi(b) \int_{u + p^n \mathbb{Z}_p} x^r d\mu_{a(N),c}$$

$$= \sum_{b \in \mathbb{Z}/Np^n} \chi(b) \left(\zeta_{b(Np^n)}(-r) - c^{1+r} \zeta_{bc^{-1}(Np^n)}(-r) \right)$$

ただし，計算の途中に表れる a, u は，$a \equiv b \pmod{p^n}$, $u \equiv b \pmod{N}$．命題の主張は Dirichlet L-関数と部分ゼータ関数の関係 (2.1) から従う． □

次に測度 $\mu_{N,c}$ をある開集合 $X_N^* \subset X_N$ に制限したものを考える．自然な全射

$$\pi : X_N \to \mathbb{Z}_p$$

に対し，$X_N^* = \pi^{-1}(\mathbb{Z}_p^*) \subset X_N$ とおく．X_N^* 上の連続関数を 0 でのばすことによって X_N 上の連続関数が定義できる．この写像

$$\mathrm{Cont}(X_N^*, K) \to \mathrm{Cont}(X_N, K)$$

はノルムを保つので，連続である．このことから，測度の写像（測度の制限）

$$\mathrm{Meas}(X_N, K) \to \mathrm{Meas}(X_N^*, K)$$

が誘導される．測度 $\mu_{N,c}$ を X_N^* に制限したものを $\mu_{N,c}^*$ と記す．

命題 4.7. $\chi : (\mathbb{Z}/Np^n)^* \to \mathbb{C}_p^*$ を *Dirichlet* 指標とする．整数 $r \geq 0$ に対して，測度 $\mu_{N,c}$ は

$$\int_{X_N^*} \chi(x)x^r d\mu_{N,c}^*(x) = (1-\chi(p)p^r)(1-\chi(c)c^{1+r})L(\chi,-r).$$

をみたす．

Proof. $\mu_{N,c}$ の定義と (4.3)から

$$\begin{aligned}\int_{X_N^*} \chi(x)x^r d\mu_{N,c}^*(x) &= \sum_{b\in\mathbf{Z}/Np^n, p\nmid b} \chi(b) \int_{u+p^n\mathbf{Z}_p} x^r d\mu_{a(N)} \\ &= \sum_{b\in\mathbf{Z}/Np^n, p\nmid b} \chi(b)\left(\zeta_{b(Np^n)}(-r) - c^{1+r}\zeta_{bc^{-1}(Np^n)}(-r)\right).\end{aligned}$$

ただし，計算の途中に表れる a, u は，$a \equiv b \pmod{p^n}$, $u \equiv b \pmod{N}$．命題の主張は Dirichlet L-関数と部分ゼータ関数の関係 (2.1)，及び

$$\sum_{b\in\mathbf{Z}/Np^n, p\nmid b} \chi(b)\zeta_{b(Np^n)}(s) = (1-\chi(p)p^{-s})L(\chi,s)$$

から従う（この等式は収束域で調べれば良い）． □

注意 4.8. X_N^* 上の測度 $\mu_{N,c}$ は以下の様にも作られる．1の N 乗根 α に対して，$\mathbb{Z}_p$ 上の測度 $\mu_{\alpha,c}$ を，$g_{1,c}(t)$ を $T=(\alpha^{-1}t-1)$ で冪級数展開した形式冪級数 $\in \mathbb{Z}_p[\alpha][[T]]$ に対応する p-進測度とする．$g_{1,c}(t)$ は命題 3.13 の条件をみたすので，$\mu_{\alpha,c}$ を $\mathbb{Z}_p^*$ に制限した測度 $\mu_{\alpha,c}^*$ は冪級数

$$g_{1,c}^{(p)}(t) := (1-\varphi)\, g_{1,c}(t)$$

に対応する．$a \in \mathbb{Z}/N$ に対して，(4.1) と同様に

$$\mu_{a(N),c}^* = (1/N)\sum_{\alpha\in\mu_N} \alpha^{-a}\mu_{\alpha,c}^*$$

と置くと，

$$\int_{X_N^*} f(x)d\mu_{N,c}^*(x) = \sum_{a\in\mathbb{Z}/N}\int_{\mathbb{Z}_p^*} f((a,x))d\mu_{a(N),c}^*(x) \tag{4.4}$$

をみたす．ただし$(a,x)\in \mathbb{Z}/N\times\mathbb{Z}_p^* \cong X_N^*$.

4.3 p-進 L-関数の構成

定義 4.9. $c\geq 2$ と $\psi\in \mathrm{Cont}(X_N^*,K)$ に対して

$$L_{p,c}(\psi) = \mu_{N,c}(\psi) = \int_{X_N^*}\psi(x)d\mu_{N,c}^*(x)$$

とおく．定義から $L_{p,c}$ は $\mathrm{Cont}(X_N^*,K)$ から K への連続関数である．

$L_{p,c}$ は結局 $\mu_{N,c}^*$ のことであるが，あえて違う記号を用いたのは，この関数が p-進ポリログと結びつくからである．$\chi:(\mathbb{Z}/Np^n)^*\to K^*$ を Dirichlet 指標とする．命題 4.7 から，$L_{p,c}$ は指標 $\psi(x)=\chi(x)x^r$ $(r\geq 0)$ に対して，

$$L_{p,c}(\chi(x)x^r) = (1-\chi(c)c^{1+r})\,(1-\chi(p)p^r)\,L(\chi,-r) \tag{4.5}$$

をみたすことが分かる．

$\omega:\mathbb{Z}_p^*\to\mu_{p-1}$ を Teichmüller 指標とする．最初に $p>2$ と仮定したので，ω は $\omega(a)\equiv a \pmod p$. 任意の $a\in\mathbb{Z}_p^*$ に対して

$$\langle a\rangle = \omega(a)^{-1}a$$

と置くと，$\langle x\rangle\equiv 1 \pmod p$ である．$x\in X_N$ に対し，$\langle x\rangle = \langle\pi(x)\rangle$ と定義する．

定義 4.10. 導手 N の p-進 Dirichlet L-関数 $\chi : (\mathbb{Z}/Np^n)^* \to K^*$ に対し，p-進 L-関数を

$$\begin{aligned} L_p(\chi, s) &:= (1 - \chi(c)\langle c\rangle^{1-s})^{-1} L_{p,c}(\chi\omega^{-1}(x)\langle x\rangle^{-s}) \\ &= (1 - \chi(c)\langle c\rangle^{1-s})^{-1} \int_{X_N^*} \chi\omega^{-1}(x)\langle x\rangle^{-s} d\mu_{N,c}^* \end{aligned} \tag{4.6}$$

と定義する．ここで $c \geq 2$ は整数，s は $\mathbb{Z}_p$ の元で，$\chi(c) = 1$ のとき $s \neq 1$ を仮定．

$s \mapsto (x \mapsto \langle x\rangle^{-s})$ は s から $\mathrm{Cont}(X_N^*, K)$ への連続関数なので，$L_p(\chi, s)$ も連続関数である．(4.5) から以下の命題が導かれる．

命題 4.11. $L_p(\chi, s)$ は整数 $s = r \leq -1$ に対して

$$L_p(\chi, r) = \left(1 - \chi\omega^{r-1}(p)p^{-r}\right) L(\chi\omega^{r-1}, r)$$

をみたす．

以上の命題から，整数 $s = r \leq -1$ のとき p-進 L-関数は c の取り方によらない．$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_p$ は稠密なので，p-進 L-関数は c の取り方によらないことが証明される．c をうまく取ることによって，p-進 L-関数 $L_p(\chi, s)$ は $\chi \neq \mathrm{id}$ のとき $\mathbb{Z}_p$ 上の関数，$\chi = \mathrm{id}$ のときは $\mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ 上の関数と定義される．

p-進 L-関数は基本的には関数 $L_{p,c}$ によって与えられている．この関数 $L_{p,c}$ は指標 $\psi(x) = \chi(x)x^r$ $(r \geq 0)$ で複素 L-関数の値と結びつく．次の章では $L_{p,c}$ の指標 $\psi(x) = \chi(x)x^r$ $(r < 0)$ での値を，p-進ポリログ関数の特殊値で記述する．

5 p-進ポリログ関数

p-進ポリログ関数は，$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の p-進解析関数である．この章では p-進ポリログ関数の定義と諸性質を述べる．

$$A = \mathbb{Z}_p\left[t, \frac{1}{1-t}\right]$$

とおく．$\widehat{A}$ を A の p-進完備化

$$\widehat{A} = \varprojlim_m A/p^m A$$

とする．文献等では $\widehat{A}$ を $\mathbb{Z}_p\{t, (1-t)^{-1}\}$ 等と記述する．この環はネーター環の完備化なのでネーター環である．

この原稿では $\widehat{A}$ の元のことを $\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の p-進解析関数と呼ぶことにする．実際の用語では $\widehat{A} \otimes \mathbb{Q}$ の元を rigid analytic function 等と呼ぶ．

フロベニウス写像 $\varphi : \widehat{A} \to \widehat{A}$ を，$\varphi(f(t)) = f(t^p)$ によって定義する．

例 5.1. $\varphi(1-t) = (1-t)^p - ph(t)$, $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ である．

$$\frac{\varphi(1-t)}{(1-t)^p} = 1 - p\frac{h(t)}{(1-t)^p}$$

と表されるので，$\log(1-x) = -\sum_{n\geq 1} x^n/n$ に習って

$$\frac{1}{p}\log\left(\frac{\varphi(1-t)}{(1-t)^p}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n-1}h(t)^n}{n(1-t)^{pn}} \tag{5.1}$$

と定義すると，係数が p-進的に 0 に収束することから，右辺の無限和は $\widehat{A}$ で収束する．以後 (5.1) で定義された $\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上のp-進解析関数を

$$\left(\frac{\varphi}{p} - 1\right)\log(1-t)$$

と記す．

5.1 p-進ポリログ関数の定義

定義 5.2. 各整数 $j \geq 1$ に対し，p-進ポリログ関数 $\widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t)$ を

$$\widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t) = \sum_{(n,p)=1} \frac{t^n}{n^j} \quad \in \mathbb{Z}_p[[t]] \tag{5.2}$$

と定義する．

上の冪級数は $\mathbb{C}_p$ の単位円盤 $\{x \in \mathbb{C}_p\,;\,|x| < 1\}$ で収束する．以下では $\widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t)$ が $\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の p-進解析関数に延びること，すなわち p-進的に解析接続されることを示す．まず準備を始める．整数 $m \geq 1$ に対し，

$$h(t) = \frac{1}{p}((1-t)^{p^m} - (1-t^{p^m})) \in \mathbb{Z}[t]$$

と置くと，

$$\frac{1}{1-t^{p^m}} = \frac{1}{(1-t)^{p^m} - ph(t)} = \frac{1}{(1-t)^{p^m}} \sum_{n \geq 1} \frac{p^n h(t)^n}{(1-t)^{np^m}}.$$

係数が p-進的に 0 に収束することから，右の無限和は $\widehat{A}$ で収束する．すなわち，$(1-t^{p^m})^{-1} \in \widehat{A}$ である．$\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の p-進解析関数 $\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t)$ を

$$\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t) = \frac{1}{1-t^{p^m}} \sum_{n=1, p \nmid n}^{p^m - 1} \frac{t^n}{n^j} \in \widehat{A}$$

と定義する．

補題 5.3. 整数 $m' \geq m \geq 1$ に対し

$$\mathrm{Li}_{j,m'}^{(p)}(t) \equiv \mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t) \pmod{p^m}. \tag{5.3}$$

Proof. 等式

$$\sum_{n=1, p \nmid n}^{p^{m'} - 1} \frac{t^n}{n^j} \equiv \frac{1-t^{p^{m'}}}{1-t^{p^m}} \sum_{n=1, p \nmid n}^{p^m - 1} \frac{t^n}{n^j} \pmod{p^m}$$

から従う． □

$\widehat{A}/p^m\widehat{A} = A/p^m A$ に注意すると，(5.3) から

$$\{\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t)\}_{m \geq 1} \in \widehat{A} = \varprojlim{}_m \widehat{A}/p^m\widehat{A}$$

となることが分かる．この元を $\mathrm{Li}_j^{(p)}(t)$ と記述する．別な言い方をすれば，

$$\mathrm{Li}_j^{(p)}(t) = \varinjlim{}_m \mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t). \tag{5.4}$$

ただし極限が収束することは $\widehat{A}$ の完備性と，(5.3) より $\{\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t)\}_{m \geq 1}$ がコーシー列を成すことから導かれる．

命題 5.4. (5.4) で定義した $\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の p-進解析関数 $\mathrm{Li}_j^{(p)}(t)$ を t に関して冪級数展開すると

$$\mathrm{Li}_j^{(p)}(t) = \sum_{(n,p)=1} \frac{t^n}{n^j} \quad \in \mathbb{Z}_p[[t]]. \tag{5.5}$$

すなわち，$\mathrm{Li}_j^{(p)}(t)$ は (5.2) で定義した p-進ポリログ関数 $\widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t)$ の拡張である．

Proof. $\mathbb{Z}_p[[t]]$ は $\widehat{A}$ を t で完備化したものである．t に関する冪級数展開とは，自然な単射 $\widehat{A} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[t]]$ のことである．定義から $\mathbb{Z}_p[[t]]$ の中で

$$\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t) \equiv \widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t) \pmod{p^m}.$$

ゆえに m を無限大に飛ばすと $\mathrm{Li}_{j,m}^{(p)}(t)$ は $\widetilde{\mathrm{Li}}_j^{(p)}(t)$ に収束する． □

以後 $\mathrm{Li}_j^{(p)}(t)$ を p-進ポリログ関数と呼ぶことにする．

5.2 p-進ポリログ関数の特徴付け

$B = A[1/t]$ と置き，$\widehat{B} = \varprojlim_m B/p^m B$ と置く．$\widehat{B}$ の元を $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の p-進解析関数と呼ぶ．自然な単射 $A \subset B$ は自然な単射 $\widehat{A} \subset \widehat{B}$ を誘導する．

t に関する微分 $d/dt : B \to B$ は自然に $\widehat{B}$ の連続な微分作用素に拡張される．

命題 5.5. p-進ポリログ関数は微分方程式

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_1^{(p)}(t) &= \left(\frac{\varphi}{p} - 1\right) \log(1-t), \\ t\frac{d}{dt}\,\mathrm{Li}_{j+1}^{(p)}(t) &= \mathrm{Li}_j^{(p)}(t) \quad (j \geq 1) \end{aligned} \tag{5.6}$$

をみたす．また，p-進ポリログ関数は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の p-進解析関数として，上の微分方程式によって特徴付けられる．

Proof. t に関する冪級数展開は単射 $\widehat{A} \subset \mathbb{Z}_p[[t]]$ を定義する．この射は d/dt による作用と可換であるため，p-進ポリログ関数が微分方程式をみたすことを示すためには，t で冪級数展開したものが上の微分方程式をみたすことを示せば十分である．これは (5.5) の冪級数展開から直ちに従う．

p-進ポリログ関数が (5.6)によって特徴付けられることは $\log t \notin \widehat{B}$ から従う．すなわち，各整数 $j \geq 1$ に対して $f_j(t) \in \widehat{B}$ が存在して，

$$f_1(t) = \mathrm{Li}_1^{(p)}(t), \qquad t\frac{d}{dt}f_{j+1}(t) = f_j(t) \quad (j \geq 1)$$

をみたすと仮定する．次に，ある整数 $j \geq 1$ に対して，$f_j = \mathrm{Li}_j^{(p)}(t)$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\frac{d}{dt}\left(f_{j+1}(t) - \mathrm{Li}_{j+1}^{(p)}(t)\right) = 0$$

が成り立ち，$\widehat{B}$ の元で微分して 0 となるのは定数に限られるため，

$$f_{j+1}(t) = \mathrm{Li}_{j+1}^{(p)}(t) + a \quad (a \in \mathbb{Z}_p)$$

を得る．これから

$$\frac{d}{dt}\left(f_{j+2}(t) - \mathrm{Li}_{j+2}^{(p)}(t)\right) = \frac{1}{t}\left(f_{j+1}(t) - \mathrm{Li}_{j+1}^{(p)}(t)\right) = \frac{a}{t}.$$

特に a/t が $\widehat{B}$ で積分可能であることが導かれる．$\log t \notin \widehat{B}$ から a/t が $\widehat{B}$ の中で積分可能となるためには $a = 0$ でなければならない．ゆえに $f_{j+1}(t) = \mathrm{Li}_{j+1}^{(p)}(t)$ が導かれ，帰納法から命題を得る． □

注意 5.6. 1. Beilinson-Deligne によって定義された motivic なポリログ層 [Be] の p-進実現である p-進ポリログ層を具体的に記述する問題は，最終的には (5.6) の微分方程式をみたす $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の p-進解析関数を探す問題に帰着される ([Ban1])．(5.6) の微分方程式はこの理由で重要である．

2. 命題 5.5 は，(5.6) の微分方程式をみたす $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の p-進解析関数が結果的には $\mathbb{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の p-進解析関数に延びることを主張している．

5.3 $\mathrm{Li}_{j,c}^{(p)}(t)$

$c \geq 2$ を整数とする．この節では，前節で定義したポリログ関数を c で変型した関数 $\mathrm{Li}_{j,c}^{(p)}(t)$ を考える．基本的には

$$\mathrm{Li}_{j,c}^{(p)}(t) = \mathrm{Li}_j^{(p)}(t) - c^{1-j}\,\mathrm{Li}_j^{(p)}(t^c)$$

となる様な関数であるが，右辺が実際に p-進解析関数となることを示す必要がある．

$$A_c = \mathbb{Z}_p\left[t, \frac{1-t}{1-t^c}\right]$$

と置き，$\widehat{A}_c$ を A_c の完備化 $\widehat{A}_c = \varprojlim_m A_c/p^m A_c$ とする．$\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t)$ は p-進ポリログ関数と同様に構成しても良いが，この節では別な構成を与える．

補題 5.7. $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in \mathbb{Z}_p[[t]]$ に対して $a_n = 0\,(n,p) \neq 1$ ならば，

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^{p^m(p-1)} f(t) \equiv f(t) \pmod{p^m}.$$

Proof. 任意の整数 $m, n \geq 1$, $(n,p) = 1$ に対して $n^{p^m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^m}$ から従う． □

関数 $g_{1,c}(t)$ を

$$\begin{aligned} g_{1,c}(t) &= \frac{t}{1-t} - \frac{ct^c}{1-t^c} \\ &= \frac{t + 2t^2 + \cdots + (c-1)t^{c-1}}{1 + t + t^2 + \cdots + t^{c-1}} \in \mathbb{Z}_p\left[t, \frac{1-t}{1-t^c}\right] \end{aligned}$$

を再び考える．

$$g^{(p)}_{1,c}(t) = (1-\varphi)g_{1,c}(t)$$

と定義すると，t で冪級数展開したとき，上の補題の条件を満たすことに注意する．

定義 5.8. p-進ポリログ関数 $\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t)$ を

$$\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t) = \lim_{m\to\infty}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{p^m(p-1)-j} g^{(p)}_{1,c}(t) \in \widehat{A}_c$$

と定義する．右辺の極限は前補題から収束することが分かり，$\widehat{A}_c$ が p-進完備であることから実際 $\widehat{A}_c$ の元を定義することが導かれる．

命題 5.9. *1.* $\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t)$ は t で冪級数展開すると，

$$\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t) = \sum_{n\geq 1,(n,p)=1} \left(\frac{t^n}{n^j} - c^{1-j}\frac{t^{nc}}{n^j}\right)$$

となる．特に，$\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t) = \mathrm{Li}^{(p)}_j(t) - c^{1-j}\,\mathrm{Li}^{(p)}_j(t^c)$ が成り立つ．

2. p-進ポリログ関数 $\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t)$ は微分方程式

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}^{(p)}_{1,c}(t) = \mathrm{Li}^{(p)}_1(t) - \mathrm{Li}^{(p)}_1(t^c) \\ &t\frac{d}{dt}\,\mathrm{Li}^{(p)}_{j+1,c}(t) = \mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t) \quad (j \geq 1) \end{aligned} \tag{5.7}$$

をみたす．

Proof. 1. $g_{1,c}(t)$ の冪級数展開が

$$\mathrm{Li}^{(p)}_{j,c}(t) = \sum_{n\geq 1,(n,p)=1} \left(\frac{t^n}{n^j} - c^{1-j}\frac{t^{nc}}{n^j}\right)$$

であることから従う．

2. 冪級数展開から従う．

□

5.4 p-進 L-関数の特殊値との関係

この節では Coleman の定理の証明を与える．K は 1 のN-乗根を全て含むと仮定する．

定理 5.10 (Coleman). 指標 $\psi(x) = \chi(x)x^r$ $(r < 0)$ に対して，

$$L_p(\chi(x)x^r) = (1 - \chi(c)c^{r+1})^{-1} \sum_{b\in\mathbb{Z}/Np^n} \chi(b) \sum_{\omega\in\mu_{Np^n}} \alpha^{-b}\,\mathrm{Li}^{(p)}_{-r,c}(\omega)$$

をみたす．ただし $c \geq 2$ は $\chi(c) \neq -c$ となる整数．

Proof. p-進 L-関数の定義により,

$$L_p(\chi(x)x^r) = (1-\chi(c)c^{r+1})^{-1}\int_{X_N^*}\chi(x)x^r d\mu_{N,c}(x).$$

右辺の積分の定義から,

$$\begin{aligned}\int_{X_N^*}\chi(x)x^r d\mu_{N,c}(x) &= \sum_{b\in\mathbf{Z}/Np^n, p\nmid b}\chi(b)\int_{u+p^n\mathbf{Z}_p}x^r d\mu_{a(N),c}(x)\\ &= \sum_{b\in\mathbf{Z}/Np^n, p\nmid b}\chi(b)\int_{u+p^n\mathbf{Z}_p}x^r d\mu^*_{a(N),c}(x).\end{aligned}$$

ただし, ここで $u\equiv b \pmod{p^n}$, $a\equiv b \pmod N$. 定義から, 最後の和の積分は

$$\begin{aligned}\int_{u+p^n\mathbf{Z}_p}x^r d\mu^*_{a(N),c}(x) &= \sum_{\alpha\in\mu_N}\alpha^{-a}\int_{u+p^n\mathbf{Z}_p}x^r d\mu^*_{\alpha,c}(x)\\ &= \sum_{\alpha\in\mu_N}\sum_{\epsilon\in\mu_{p^n}}\alpha^{-a}\epsilon^{-u}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\epsilon^x x^r d\mu_{\alpha,c}(x).\end{aligned}$$

$\mathrm{Cont}(\mathbf{Z}_p^*, K)$ の中で, $\varinjlim_m x^{p^m(p-1)+r}\to x^r$ となるので, (3.11) と注意 4.8 から結局最後の積分は

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\epsilon^x x^r d\mu^*_{\alpha,c}(x) &= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\epsilon^x x^{p^m(p-1)+r}d\mu^*_{\alpha,c}(x)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{p^m(p-1)+r} g^{(p)}_{1,c}(t)\Big|_{t=\alpha\epsilon}\\ &= \mathrm{Li}^{(p)}_{r,c}(\alpha\epsilon).\end{aligned}$$

□

参考文献

[Ban1] K. Bannai, Rigid syntomic cohomology and p-adic polylogarithms, J. Reine Angew. Math. **529** (2000), 205-237.

[Ban2] K. Bannai, On the p-adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves, to appear from Duke Math. J.

[Be] A.A. Beilinson, Polylogarithm and Cyclotomic Elements, typewritten preprint, MIT (1989) or (1990).

[Co] R. Coleman, Dilogarithms, Regulators, and p-adic L-functions, Inv. math. **69** (1982), 171-208.

[GK] M. Gros, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques I (avec un appendice par Masato Kurihara), Invent. Math. **99** (1990), 293-320.

[Gr] M. Gros, Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques II, Invent. Math. **115** (1994), 61-79.

[Hi] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Students Text **26**, Cambridge Univ. Press, (1993).

[Iw] K. Iwasawa, *Lectures on p-adic L-functions*, Ann. of Math. Studies **74**, Princeton Univ. Press, (1972).

[Ka] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}, in: *Arithmetic Algebraic Geometry*, SLN **1553**, Springer, (1993).

[Kz] N. Katz, p-adic L-functions via moduli of elliptic curves, Proc. Symp. Pure. Math. **29** (1975), 479-506.

[Ko] N. Koblitz, A new proof of certain formula for p-adic L-functions, Duke Math. J. **46** (1979), 455-468.

[KL] T. Kubota and H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-funktionen, J. reine angew. Math. **214/215** (1964), 328-339.

[La] S. Lang, *Cyclotomic Fields I and II (with an appendix by K. Rubin)*, GTM, Springer, (1990).

[Ma] B. Mazur, Analyse p-adique, Bourbaki report (unpublished).

[So] M. Somekawa, Log-syntomic regulators and p-adic polylogarithm, K-Theory **17** (1999), 256-294.

[Su] S. Sugimoto, Filtered modules and p-adic polylogarithms, thesis, University of Tokyo (1992).

[Wa] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields, Second Edition, GTM **83**, Springer, (1991).